Lösungen der Hausaufgabe Nr. 13 Lineare Algebra
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

28. Januar 2005

1 Lineare Abbildungen

1.1

$$\varphi : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \sin x_1 + 4x_2$$

Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in M_{3,1}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \sin(x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2) \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ da $\sin(x_1 + y_1) \neq \sin x_1 + \sin y_1$, ist φ nicht linear

1.2

$$\varphi : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) \\ &= (2x_1 - x_2 + 3x_3) + (2y_1 - y_2 + 3y_3) \\ &= \varphi(\mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\varphi(\mathfrak{x}) &= a(2x_1 - x_2 + 3x_3) \\ &= 2ax_1 - ax_2 + 3ax_3 \\ &= \varphi\left(\begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \varphi\left(a\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \varphi(a\mathfrak{x}) \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ φ ist linear

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\varphi &= \{\mathfrak{x} : \varphi(\mathfrak{x}) = 0\} \\ &= \{\mathfrak{x} : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\} \qquad (x_2 = 2x_1 + 3x_3) \\ &= \left\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\mathfrak{x} : \mathfrak{x} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathfrak{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \end{aligned}$$

1.3

$$\varphi: M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\varphi(\mathfrak{x}) := A\mathfrak{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) &= A(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(x_2+y_2)-2(x_3+y_3) \\ -(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3) \\ -(x_1+y_1)+3(x_3+y_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x_2-2x_3 \\ -x_1-x_2+x_3 \\ -x_1+3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2-2y_3 \\ -y_1-y_2+y_3 \\ -y_1+3y_3 \end{pmatrix} \\
&= \varphi(\mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\varphi(\mathfrak{x}) &= a \cdot \begin{pmatrix} -x_2-2x_3 \\ -x_1-x_2+x_3 \\ -x_1+3x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(-x_2-2x_3) \\ a(-x_1-x_2+x_3) \\ a(-x_1+3x_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -ax_2-2ax_3 \\ -ax_1-ax_2+ax_3 \\ -ax_1+3ax_3 \end{pmatrix} \\
&= \varphi(a\mathfrak{x})
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ φ ist linear

Lösung des Linearen Gleichungssystems $A\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur Bestimmung von $\operatorname{Ker}\varphi$:

$$\begin{array}{rrr|r}
0 & -1 & -2 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 3 & 0 \\
\hline
\boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 \\
-1 & 0 & 3 & 0 \\
\hline
0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Leitelemente: x_1, x_2
Setzen $t_1 := x_3$

$$\begin{aligned}
x_2 + 2x_3 &= 0 \\
x_2 + 2t_1 &= 0 \\
x_2 &= -2t_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
x_1 + (-2t_1) - t_1 &= 0 \\
x_1 &= 3t_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 + 3t_1 \\
x_2 &= 0 - 2t_1 \\
x_3 &= 0 + t_1
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t_1 \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\varphi &= \left\{ \mathfrak{x} :\ \varphi(\mathfrak{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \mathfrak{x} :\ A\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \mathfrak{x} :\ \mathfrak{x} = t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_1 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathfrak{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}
$$

2 Lineare Unabhängigkeit

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

Prüfen auf lineare Unabhängigkeit:

$$
\begin{array}{rrr}
\boxed{1} & 1 & -1 \\
-1 & 0 & 3 \\
0 & -1 & -2 \\
\hline
0 & \boxed{1} & 2 \\
0 & -1 & -2 \\
\hline
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$\curvearrowright$ Es existiert eine nichttriviale Lösung:

$$
-3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

$\curvearrowright$ Die Spalten von A sind linear abhängig

3 Dimension und Basis

3.1

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \underbrace{w - x + 2y - z = 0}_{w = x - 2y + z} \right\} \\
&= \left\{ \mathfrak{x} : \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \mathfrak{x} : \mathfrak{x} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$\curvearrowright \mathfrak{B}_{U_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Prüfen auf lineare Unabhängigkeit:

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{1} & -2 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 2 & -1 \\
0 & \boxed{1} & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & \boxed{1} \\
\hline
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$\curvearrowright \mathfrak{B}_{U_1}$ ist linear unabhängig und damit Basis von U_1

$$\dim U_1 = |\mathfrak{B}_{U_1}| = 3$$

$$\mathfrak{B}' = \{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4\}$$

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$$

$\curvearrowright$ Ersetzen von $\mathfrak{e}_1$ durch $\mathfrak{a}_1$

$$\mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3$$

$\curvearrowright$ Ersetzen von $\mathfrak{e}_2$ durch $\mathfrak{a}_2$

$$\mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2 + \frac{1}{2}\mathfrak{e}_3 + \mathfrak{e}_4$$

$\curvearrowright$ Ersetzen von $\mathfrak{e}_3$ durch $\mathfrak{a}_3$

$$\mathfrak{B}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Komplementärer Unterraum:

$$U^c = \left\{ \mathfrak{x} : \mathfrak{x} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

3.2

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v+2w \\ 0 \\ w \\ w+v \end{pmatrix} : v, w \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : v, w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{B}_{U_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\dim U_2 = |\mathfrak{B}_{U_2}| = 2$$
$$\mathfrak{B}' = \{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4\}$$
$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_4$$

$\curvearrowright$ Ersetzen von $\mathfrak{e}_1$ durch $\mathfrak{a}_1$

$$\mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_4$$

$\curvearrowright$ Ersetzen von $\mathfrak{e}_3$ durch $\mathfrak{a}_2$

$$\mathfrak{B}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Komplementärer Unterraum:

$$U^c = \left\{ \mathfrak{x} : \mathfrak{x} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$