TU Bergakademie Freiberg
Institut für Diskrete Mathematik und Algebra
Prof. Dr. Martin Sonntag
Dr. Uwe Weber

Freiberg, den 26. Januar 2005

Lineare Algebra I BNC
13. Hausaufgabe

Abgabe nicht gefordert (aber Bearbeitung dringend empfohlen)

1. Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind. Wenn ja, geben Sie den großen Kern an.

   (a) $\varphi : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \sin x + 4y$.

   (b) $\varphi : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2x - y + 3z$.

   (c) $\varphi : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{3,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(\mathfrak{x}) = A\mathfrak{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Sind die Spalten der Matrix A aus 1.(c) linear unabhängig?

3. Geben Sie jeweils die Dimension und eine Basis des Unterraums $U_i \in \mathrm{Sub}(V_i)$ an (und weisen Sie nach, daß es sich um eine Basis handelt). Ergänzen Sie die Basis von U_i jeweils nach dem Steinitzschen Austauschsatz zu einer Basis von ganz V_i, und geben Sie einen zu U_i komplementären Unterraum in V_i an.

   (a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} : w - x + 2y - z = 0 \right\}, \quad V_1 = M_{4,1}(\mathbb{R})$

   (b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v + 2w \\ 0 \\ w \\ w + v \end{pmatrix} : v, w \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = M_{4,1}(\mathbb{R})$.