Lösungen der Hausaufgabe Nr. 12 Lineare Algebra
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

20. Januar 2005

1 Vektorraum

1.1

Damit M Erzeugendensystem von U ist, muss gelten

$$\alpha_1 \mathfrak{a} + \alpha_2 \mathfrak{b} + \alpha_3 \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_i, a, b \in \mathbb{R}$$

D.h. folgendes Gleichungssystem muss lösbar sein:

$$\begin{array}{rrrcr} \alpha_1 & -\alpha_2 & +2\alpha_3 & = & a \\ 2\alpha_1 & -2\alpha_2 & +4\alpha_3 & = & 2a \\ & \alpha_2 & +3\alpha_3 & = & b \\ 0\alpha_1 & +0\alpha_2 & +0\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 2 & a \\ 2 & -2 & 4 & 2a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & b \end{array}$$

$\curvearrowright$ Das Gleichungssystem ist lösbar
$\curvearrowright$ M ist Erzeugendensystem von U

1.2

$$\mathfrak{c} = \alpha_1 \mathfrak{a} + \alpha_2 \mathfrak{b}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\curvearrowright$

$$\alpha_2 = 3$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_1 &= 5 \end{aligned}$$

$\curvearrowright$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3

Die linearen Hüllen $\mathcal{L}(\{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\})$ und $\mathcal{L}(\{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}\})$ sind gleich, da der Vektor $\mathfrak{c}$ als Linearkombination aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ darstellbar ist und dieser daher in $\mathcal{L}(\{\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}\})$ vorhanden sein muss.

2 Lineare Abbildung

$$U = \left\{ \mathfrak{x} :\ \mathfrak{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\varphi(U) = \left\{ \mathfrak{x} :\ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2a + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \\ -a + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

Bei der Bildmenge $\varphi(U)$ handelt es sich um eine Gerade in der x_1-x_3-Ebene mit der Steigung $-\frac{1}{2}$. Alle Punkte aus U (der x_1-x_2-Ebene) werden auf diese Gerade projeziert.