Lösungen der Hausaufgabe Nr. 9 Lineare Algebra
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

4. Januar 2005

1 Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrr|r}
\boxed{1} & 0 & -2 & -1 & 1 \\
-2 & -1 & 1 & -3 & -2 \\
3 & 2 & 0 & 9 & 17 \\
0 & -1 & -3 & -3 & a \\
\hline
0 & -1 & -3 & -5 & 0 \\
0 & 2 & 6 & 12 & 14 \\
0 & -1 & -3 & -3 & a \\
\hline
0 & \boxed{1} & 3 & 5 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 6 & 7 \\
0 & 1 & 3 & 3 & -a \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -a \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 14-a
\end{array}$$

$\curvearrowright$ Das Gleichungssystem ist für $a = 14$ lösbar.
Leitelemente: x_1, x_2, x_4
Setzen $t_1 := x_3,\ a = 14$

$$x_4 = 7$$

$$\begin{aligned}
x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \\
x_2 + 3t_1 + 5 \cdot 7 &= 0 \\
x_2 &= -35 - 3t_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 - 2t_1 - 7 &= 1 \\
x_1 &= 8 + 2t_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcrr}
x_1 & = & 8 & +2t_1 \\
x_2 & = & -35 & -3t_1 \\
x_3 & = & & t_1 \\
x_4 & = & 7 &
\end{array}
$$

$$
\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -35 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

2 Homomorphismus

$$
G_1 := \left(\mathbb{Z}/_{(8)},\ +\right),\ G_2 := \left(\mathbb{Z}/_{(4)},\ +\right)
$$

- Repräsentantenunabhängigkeit

  Da $4|8$, gilt

  $$
  [m]_{(8)} = [n]_{(8)} \Rightarrow [m]_{(4)} = [n]_{(4)}
  $$

- Nachweis der Homomorphie-Eigenschaft

  Zu zeigen: $\forall a, b \in G_1 :\ \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

  Seien $m, n \in \mathbb{Z}$

  $$
  \begin{aligned}
  \varphi([m]_{(8)} + [n]_{(8)}) &= \varphi([m+n]_{(8)}) \\
  &= [m+n]_{(4)} \\
  &= [m]_{(4)} + [n]_{(4)} \\
  &= \varphi([m]_{(8)}) + \varphi([n]_{(8)})
  \end{aligned}
  $$

- (großer) Kern von φ

  $$
  \begin{aligned}
  \operatorname{Ker}\varphi &= \left\{a :\ a \in G_1 :\ \varphi(a) = [0]_{(4)}\right\} \\
  &= \left\{[0]_{(8)},\ [4]_{(8)}\right\}
  \end{aligned}
  $$

- Image von φ

  $$
  \begin{aligned}
  \operatorname{Im}\varphi &= \{\varphi(a) :\ a \in G_1\} \\
  &= \left\{\varphi([0]_{(8)}),\ \varphi([1]_{(8)}),\ \ldots,\ \varphi([7]_{(8)})\right\} \\
  &= \left\{[0]_{(4)},\ [1]_{(4)},\ [2]_{(4)},\ [3]_{(4)}\right\}
  \end{aligned}
  $$

- Faktorgruppe

$$\begin{aligned}{}^{\mathbb{Z}/(8)}/_{\operatorname{Ker}\varphi} &= \left\{a + \operatorname{Ker}\varphi:\ a \in \mathbb{Z}/_{(8)}\right\}\\ &= \left\{[0]_{(8)} + \operatorname{Ker}\varphi,\ [1]_{(8)} + \operatorname{Ker}\varphi,\ \ldots,\ [7]_{(8)} + \operatorname{Ker}\varphi\right\}\\ &= \left\{\left\{[0]_{(8)},\ [4]_{(8)}\right\},\ \left\{[1]_{(8)},\ [5]_{(8)}\right\},\ \left\{[2]_{(8)},\ [6]_{(8)}\right\},\ \left\{[3]_{(8)},\ [7]_{(8)}\right\}\right\}\end{aligned}$$

3 Isomorphismus

$$G_1 := \left(\mathbb{Z}/_{(4)},\ +\right),\ G_2 := \left(\mathbb{Z}^p/_{(5)} \setminus \{0\},\ \cdot\right)$$

Gesucht ist $\hom(G_1, G_2) \ni \varphi:\ G_1 \to G_2$, φ bijektiv

$$\begin{aligned}\varphi\left([0]_{(4)}\right) &= [1]_{(5)}\\ \varphi\left([1]_{(4)}\right) &= [2]_{(5)}\\ \varphi\left([2]_{(4)}\right) &= [4]_{(5)}\\ \varphi\left([3]_{(4)}\right) &= [3]_{(5)}\end{aligned}$$

4 Beweis durch Widerspruch

$$G_1 := (\mathbb{Q},\ +),\ G_2 := \left(\mathbb{Q}^+,\ \cdot\right),\ \varphi:\ G_1 \to G_2$$

Annahme: Sei $\varphi \in \hom(G_1,\ G_2)$ und φ bijektiv
Dann gilt $\forall a, b \in G_1:\ \varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
Setzen von $a = b = \frac{c}{2}$ mit $c \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\right) &= \varphi\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{c}{2}\right)\\ \varphi(c) &= \varphi\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{c}{2}\right)\\ \varphi\left(\frac{c}{2}\right) &= \sqrt{\varphi(c)}\end{aligned}$$

Dies stellt einen Widerspruch dar, da aufgrund der Bijektivität von φ gilt $\exists c \in \mathbb{Q}:\ \varphi(c) = 2$ und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$.

5 Kannibalen

Den Farben der Hüte werden die Zahlen 0 bis 2 zugeordnet. Der hinterste der Reihe bildet nun die Summe über alle Hutfarben, die er vor sich sieht, d.h. alle bis auf seine eigene. Dabei rechnet er modulo 3 und erhält als Ergebnis wieder eine Zahl zwischen 0 und 2.

Er rät als seine Hutfarbe die errechnete Zahl. Dabei wird er mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ danebenliegen und verspeist (die Kannibalen sollten daher den dicksten Touristen nach hinten stellen).

Der nächste in der Reihe bildet auf die gleiche Art die Summe der Hüte vor ihm. Aus dem Eregebnis und der geratenen Farbe seines Vorgängers kann er seine eigene Farbe errechnen. Diese rät er und kommt frei.

Dieses Vorgehen setzt sich weiter fort: jeder folgende Tourist kann mit der Summe, die er vor sich sieht, der zuerst „geratenen“ Summe und der Summe der bereits richtig geratenen Farben seine eigene Hutfarbe bestimmen.

Auf diese Art werden mindestens 29 Touristen gerettet (arme Kannibalen).