TU Bergakademie Freiberg
Institut für Diskrete Mathematik und Algebra
Prof. Dr. Martin Sonntag
Dr. Uwe Weber

Freiberg, den 15. Dezember 2004

Lineare Algebra I BNC
9. Hausaufgabe

Abgabe in der Woche vom 3. 1. 2005 (in der Übung)

1. Bestimmen Sie den Parameter a so, daß das folgende lineare Gleichungssystem lösbar ist. Geben Sie für dieses a die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & 9x_4 & = & 17 \\ & - & x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & a. \end{array}$$

2. Sei $\varphi : (\mathbb{Z}/(8), +) \to (\mathbb{Z}/(4), +)$ gegeben durch $\varphi([m]_{(8)}) := [m]_{(4)}$. (Es ist also z. B. $\varphi([2]_{(8)}) = \varphi([6]_{(8)}) = [2]_{(4)}$.)

   Weisen Sie nach, daß φ ein Homomorphismus ist, und geben Sie $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ und die Faktorgruppe $(\mathbb{Z}/(8))/\operatorname{Ker}\varphi$ (durch Aufschreiben ihrer Cayley-Tafel) an.

3. Zusatz (fakultativ, aber wünschenswert): Sei $(\mathbb{Z}/(4), +)$ die mit der Restklassenaddition versehene zyklische Gruppe.

   $(\mathbb{Z}^p/(5), \cdot) = (\mathbb{Z}/(5) \setminus \{[0]\}, \cdot)$ sei die Gruppe der primen Restklassen modulo 5 aus der 8. Übung, d. h.
$$\mathbb{Z}^p/(5) = \{[1]_{(5)}, [2]_{(5)}, [3]_{(5)}, [4]_{(5)}\},$$
   mit der Restklassenmultiplikation $[m]_{(5)} \cdot [n]_{(5)} := [mn]_{(5)}$. Man gebe einen Isomorphismus zwischen beiden Gruppen an
   (durch direktes Hinschreiben $\varphi([0]_{(4)}) = \ldots, \varphi([1]_{(4)}) = \ldots, \ldots$).

   (Hinweis: Die Aufgabe wird erleichtert, wenn Sie sich überlegen, daß beide Gruppen zyklisch sind und von welchen Elementen sie jeweils erzeugt werden.)

4. Zusatz (fakultativ, aber wünschenswert): In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ isomorph sind (ein Isomorphismus ist dort die Logarithmusfunktion).

   Man zeige, daß es keinen Isomorphismus von $(\mathbb{Q}, +)$ auf $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ gibt. ($\mathbb{Q}$: rationale Zahlen, $\mathbb{Q}^+$: positive rationale Zahlen. Hinweis: Konstruieren Sie einen Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$.)

Für eine Mußestunde zwischen den Feiertagen gebe ich Ihnen als praktische Anwendung der Modulo-Rechnung außerhalb der Bewertung noch folgende kleine Aufgabe:

30 Urlauber stranden auf einer Kannibaleninsel. Sie erhalten noch eine Chance, sich durch Nachweis ihrer mathematischen Fähigkeiten vor dem Verspeistwerden zu retten: Jedem Urlauber wird ein roter, grüner oder blauer Hut aufgesetzt, ohne daß er selbst die Farbe seines Hutes sehen kann. Er darf einem anderen auch nicht die Farbe von dessen Hut mitteilen. Dann werden alle hintereinander in einer Reihe aufgestellt und müssen der Reihe nach, mit dem hintersten beginnend, die Farbe ihres Hutes raten. Wer richtig rät, ist gerettet. Jeder kann die Antworten der anderen hören. Mit welcher Strategie (die sie vorher vereinbaren können) können sich möglichst viele Urlauber retten?

Ich wünsche Ihnen viel Spaß mit dieser Aufgabe, schöne Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr.