Lösungen der Hausaufgabe Nr. 8 Lineare Algebra
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

12. Dezember 2004

1 Lineares Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\
2 & 2 & 2 & 8 & 2 \\
-1 & 0 & -2 & 5 & 13 \\
0 & 1 & -1 & 3 & a \\
\hline
1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\
\boxed{1} & 1 & 1 & 4 & 1 \\
1 & 0 & 2 & -5 & -13 \\
0 & 1 & -1 & 3 & a \\
\hline
0 & -1 & -3 & -5 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -9 & -14 \\
0 & 1 & -1 & 3 & a \\
\hline
0 & \boxed{1} & 3 & 5 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -9 & -14 \\
0 & 1 & -1 & 3 & a \\
\hline
0 & 0 & 4 & -4 & -14 \\
0 & 0 & -4 & -2 & a \\
\hline
0 & 0 & \boxed{2} & -2 & -7 \\
0 & 0 & -2 & -1 & \frac{1}{2}a \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-3}} & \frac{1}{2}a - 7
\end{array}
$$

Das Gleichungssystem ist für $a \in \mathbb{R}$ lösbar.

$$
\begin{aligned}
-3x_4 &= \frac{1}{2}a - 7 \\
x_4 &= \frac{1}{3}\left(7 - \frac{1}{2}a\right) \\
&= \frac{7}{3} - \frac{1}{6}a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_3 - 2\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}a\right) &= -7 \\
2x_3 &= 2\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}a\right) - 7 \\
x_3 &= \frac{7}{3} - \frac{1}{6}a - \frac{7}{2} \\
&= -\frac{7}{6} - \frac{1}{6}a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 + 3\left(-\frac{7}{6} - \frac{1}{6}a\right) + 5\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}a\right) &= 0 \\
x_2 &= -3\left(-\frac{7}{6} - \frac{1}{6}a\right) - 5\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}a\right) \\
&= \frac{7}{2} + \frac{1}{2}a - \frac{35}{3} + \frac{5}{6}a \\
&= -\frac{49}{6} + \frac{4}{3}a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + \left(-\frac{49}{6} + \frac{4}{3}a\right) + \left(-\frac{7}{6} - \frac{1}{6}a\right) + 4\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}a\right) &= 1 \\
x_1 - \frac{49}{6} + \frac{4}{3}a - \frac{7}{6} - \frac{1}{6}a + \frac{28}{3} - \frac{2}{3}a - 1 &= 0 \\
x_1 + \left(\frac{28}{3} - \frac{49}{6} - \frac{7}{6} - 1\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)a &= 0 \\
x_1 - 1 + \frac{1}{2}a &= 0 \\
x_1 &= 1 - \frac{1}{2}a
\end{aligned}
$$

$$
\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{49}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R})
$$

2 Monoid

2.1 Prüfen Halbgruppeneigenschaften

- $\mathbb{R} \neq \emptyset$
- Assoziativität

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= \frac{ab}{2} * c \\ &= \frac{\frac{ab}{2}c}{2} \\ &= \frac{abc}{4} \\ a * (b * c) &= a * \frac{bc}{2} \\ &= \frac{a\frac{bc}{2}}{2} \\ &= \frac{abc}{4} \end{aligned}$$

  $\curvearrowright$ * ist assoziativ

- $a * b = \frac{ab}{2}$ ist binäre Operation in $\mathbb{R}$

$\curvearrowright$ $(\mathbb{R}, *)$ ist Halbgruppe

2.2 Einselement e

$$\begin{aligned} a * e &= e * a = a \\ &= \frac{ae}{2} = \frac{ea}{2} = a \\ \curvearrowright e &= 2 \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ $(\mathbb{R}, *, 2)$ ist Monoid

2.3 Einheitengruppe

$$\begin{aligned} a * a^{-1} &= e \\ \curvearrowright \frac{a \cdot a^{-1}}{2} &= 2 \\ a^{-1} &= \frac{4}{a} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3 Cayley-Tafel und Untergruppen

3.1 Prüfen Halbgruppeneigenschaften

- $G = \mathbb{Z}/_{(6)} \neq \emptyset$
- Assoziativität

$$\begin{aligned}
\big([m]_{(6)} + [n]_{(6)}\big) + [p]_{(6)} &= [m+n]_{(6)} + [p]_{(6)} \\
&= [m+n+p]_{(6)} \\
[m]_{(6)} + \big([n]_{(6)} + [p]_{(6)}\big) &= [m]_{(6)} + [n+p]_{(6)} \\
&= [m+n+p]_{(6)}
\end{aligned}$$

  $\curvearrowright$ + ist assoziativ

- + ist binäre Operation in G

$\curvearrowright$ $(G, +)$ ist Halbgruppe

3.2 Einselement e

$$\begin{aligned}
[m]_{(6)} + [e]_{(6)} &= [e]_{(6)} + [m]_{(6)} = [m]_{(6)} \\
[m+e]_{(6)} &= [m]_{(6)} \\
\curvearrowright e &= 0
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ $(G, +, 0)$ ist Monoid

3.3 Cayley-Tafel

(Definieren $i := [i]_{(6)}$)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Jedes Element steht genau einmal in jeder Zeile und Spalte, d.h. jedes Element ist invertierbar.

$\curvearrowright$ $(G, +, 0, ^{-1})$ ist Gruppe

3.4 Untergruppen

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{[0]_{(6)}\} \\
U_2 &= \{[0]_{(6)}, [3]_{(6)}\} \\
U_3 &= \{[0]_{(6)}, [2]_{(6)}, [4]_{(6)}\} \\
U_4 &= \{[0]_{(6)}, [1]_{(6)}, [2]_{(6)}, [3]_{(6)}, [4]_{(6)}, [5]_{(6)}\}
\end{aligned}$$

4 Cayley-Tafel vervollständigen

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		a_2			
a_2				a_5	a_1
a_3					
a_4					
a_5					

Aus $a_1 * a_2 = a_2$ folgt, dass a_1 Einselement ist. Damit können die erste Zeile und Spalte vervollständigt werden:

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_2			a_5	a_1
a_3	a_3				
a_4	a_4				
a_5	a_5				

$a_2 * a_3$ kann nur a_4 ergeben, da die Gruppeneigenschaft fordert, dass jedes Element in jeder Zeile und Spalte nur einmal vorkommt:

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_2	a_3	a_4	a_5	a_1
a_3	a_3				
a_4	a_4				
a_5	a_5				

Ab hier ist das gleiche Schema zu erkennen, das sich in (3.3) ergeben hat, wobei die Zeilen und Spalten jeweils um eine Stelle verschoben sind. Damit kann die Cayley-Tafel vervollständigt werden:

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_2	a_3	a_4	a_5	a_1
a_3	a_3	a_4	a_5	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3
a_5	a_5	a_1	a_2	a_3	a_4