TU Bergakademie Freiberg
Institut für Diskrete Mathematik und Algebra
Prof. Dr. Martin Sonntag
Dr. Uwe Weber

Freiberg, den 8. Dezember 2004

Lineare Algebra I BNC
8. Hausaufgabe

Abgabe in der Woche vom 13. 12. 2004 (in der Übung)

1. Bestimmen Sie den Parameter a so, daß das folgende lineare Gleichungssystem lösbar ist. Geben Sie für dieses a die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 13 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & a \end{array} .$$

2. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}, *)$ mit $a*b := \dfrac{ab}{2}$ ein Monoid ist. Geben Sie das neutrale Element und die Einheitengruppe (Gruppe der invertierbaren Elemente) an. Wie sieht das Inverse eines invertierbaren Elements a bezüglich $*$ aus?

3. Sei $G = \mathbb{Z}/(6) = \{[0]_{(6)}, \ldots, [5]_{(6)}\}$, versehen mit der Operation $[m]_{(6)} + [n]_{(6)} := [m+n]_{(6)}$. Dabei bezeichnet $[m]_{(6)}$ die Restklasse modulo 6. Zeigen Sie, daß $(G, +)$ eine Gruppe ist, schreiben Sie die Cayley-Tafel auf und geben Sie alle Untergruppen an.

4. Vervollständigen Sie die folgende Cayley-Tafel so, daß $G = \{a_1, \ldots, a_5\}$ eine Gruppe wird. Begründen Sie Ihr Ergebnis. (Die Untersuchung der Assoziativität wird nicht verlangt.)

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		a_2			
a_2				a_5	a_1
a_3					
a_4					
a_5					