Lösungen der Hausaufgabe Nr. 6 Lineare Algebra Studiengang Network Computing WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

27. November 2004

1 Äquivalenzrelationen

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3\} \\ M \times M &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \{(1,1), (2,2), (3,3)\} = 1_M \\ \varrho_2 &= 1_M \cup \{(1,2), (2,1)\} \\ \varrho_3 &= 1_M \cup \{(1,3), (3,1)\} \\ \varrho_4 &= 1_M \cup \{(2,3), (3,2)\} \\ \varrho_5 &= 1_M \cup \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\} \end{aligned}$$

2 (Halb)Ordungsrelationen

2.1

$$\varrho \subseteq \mathfrak{P}(\{x,y,z\}) \times \mathfrak{P}(\{x,y,z\}),\ (X,Y) \in \varrho \Leftrightarrow X \subset Y$$

ϱ ist irreflexive Halbordnungsrelation ($\prec$)

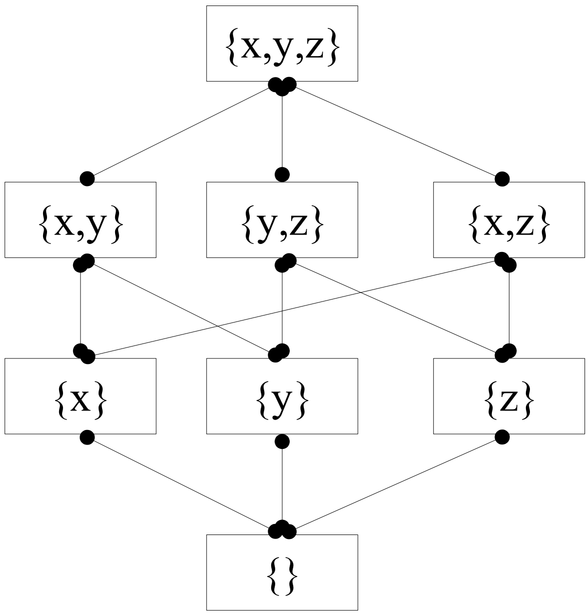
1. ϱ ist irreflexiv

$$\nexists X \in \mathfrak{P}(\{x,y,z\}):\ X \subset X$$
$$\curvearrowright (X,X) \notin \varrho$$

2. ϱ ist transitiv

   Seien $(X,Y) \in \varrho$ und $(Y,Z) \in \varrho$

$$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{P}(\{x,y,z\}):\ X \subset Y\ \wedge\ Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$$
$$\curvearrowright (X,Z) \in \varrho$$



$\{x,y,z\}$ ist größtes und maximales Element
$\emptyset$ ist kleinstes und minimales Element

2.2

$$\varrho \subseteq M \times M,\ \ M = \{a, b, c, d, e\}$$

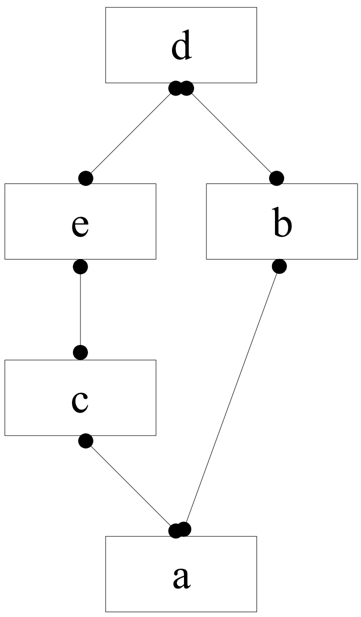
$$\varrho = 1_M \cup \{(a, b), (a, d), (a, c), (a, e), (b, d), (c, d), (c, e), (e, d)\}$$

ϱ ist reflexive Halbordnung ($\preccurlyeq$)

1. ϱ ist reflexiv
$$\forall x \in M:\ \ (x, x) \in \varrho,\ \ \text{da } 1_M \subseteq \varrho$$

2. ϱ ist transitiv
$$\forall x, y, z \in M:\ \ (x, y) \in \varrho\ \wedge\ (y, z) \in \varrho \Rightarrow (x, z) \in \varrho$$

3. ϱ ist antisymmetrisch
$$\forall x, y \in M:\ \ (x, y) \in \varrho\ \wedge\ (y, x) \in \varrho \Rightarrow x = y$$



d ist größtes und maximales Element
a ist kleinstes und minimales Element

2.3

$$\varrho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x,y) \in \varrho \Leftrightarrow \sin x \leq \sin y$$

ϱ ist keine (Halb)Ordnungsrelation

1. ϱ ist reflexiv

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin x \leq \sin x \\ &\Rightarrow (x,x) \in \varrho \end{aligned}$$

2. ϱ ist nicht antisymmetrisch

   Aus

$$\sin x \leq \sin y\ \wedge\ \sin y \leq \sin x\ \Rightarrow\ \sin x = \sin y$$

   folgt

$$x = y + 2k\pi \qquad (\text{mit } k \in \mathbb{Z})$$

2.4

$$\varrho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x,y) \in \varrho \Leftrightarrow \sin x < \sin y$$

ϱ ist irreflexive Halbordnungsrelation ($\prec$)

1. ϱ ist irreflexiv

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin x \not< \sin x \\ &\Rightarrow (x,x) \notin \varrho \end{aligned}$$

2. ϱ ist transitiv

   Seien $(x,y) \in \varrho$ und $(y,z) \in \varrho$

$$\begin{aligned} &\forall x,y,z \in \mathbb{R}:\ \sin x < \sin y\ \wedge\ \sin y < \sin z \\ &\Rightarrow \sin x < \sin z \\ &\Rightarrow (x,z) \in \varrho \end{aligned}$$

Maximale Elemente: $\left\{x \in \mathbb{R}:\ x = \frac{(1+4k)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Minimale Elemente: $\left\{x \in \mathbb{R}:\ x = \frac{(3+4k)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Kleinste / größte Elemente existieren nicht