Lösungen der Hausaufgabe Nr. 5 Lineare Algebra
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

18. November 2004

1 Bijektive Abbildung

Gesucht wird

$$f : \mathbb{Z} \to M \qquad \text{mit } M := \{x : \; x \in \mathbb{Z} \; \wedge \; 3 \nmid x\}$$

Veranschaulichung (mit $z \in \mathbb{Z}$, $m \in M$ und n als „Hilfsvariable"):

$$\begin{array}{c|rrrr|rrrr|rrrr|rrrr|l}
z & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & -5 & 6 & -6 & 7 & -7 & 8 & \dots \\
m & -1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 4 & -5 & 5 & -7 & 7 & -8 & 8 & -10 & 10 & -11 & 11 & \dots \\
n & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & \dots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
m &= z + n \qquad \text{für } z > 0 \\
m &= z - n - 1 \qquad \text{für } z \leq 0 \\
n &= \left\lfloor \frac{|2z-1|}{4} \right\rfloor
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + \left\lfloor \frac{|2x-1|}{4} \right\rfloor & \text{für } x > 0 \\ x - \left\lfloor \frac{|2x-1|}{4} \right\rfloor - 1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

2 Abbildung und Erweiterungen

$$\begin{aligned}\widehat{f}([0,\pi]) &= \{y:\ y\in\mathbb{R}\ \wedge\ \exists x\in[0,\pi]:\ \cos x = y\}\\ &= [-1,1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{f^{-1}}(\widehat{f}([0,\pi])) &= \widehat{f^{-1}}([-1,1])\\ &= \{x:\ x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \cos x\in[-1,1]\}\\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{f^{-1}}([1,3]) &= \{x:\ x\in\mathbb{R}\ \wedge\ \cos x\in[1,3]\}\\ &= \{0,2\pi,4\pi,\ldots\}\\ &= \{x:\ x = n\cdot 2\pi\ \wedge\ n\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

3 Äquivalenzrelationen und -klassen

3.1

Gegeben ist die Relation $\varrho\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit $(x,y)\in\varrho\Leftrightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$

1. ϱ ist reflexiv:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} x &= \operatorname{sgn} x\\ \curvearrowright (x,x) &\in \varrho\end{aligned}$$

2. ϱ ist symmetrisch:
   Sei $(x,y)\in\varrho$

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} x &= \operatorname{sgn} y\\ \Leftrightarrow \operatorname{sgn} y &= \operatorname{sgn} x\\ \curvearrowright (y,x) &\in \varrho\end{aligned}$$

3. ϱ ist transitiv:
   Seien (x,y) und $(y,z)\in\varrho$

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y\ \ \wedge\ \ \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z&\\ \Rightarrow \operatorname{sgn} x &= \operatorname{sgn} z\\ \curvearrowright (x,z) &\in \varrho\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \varrho$ ist Äquivalenzrelation

$$M/_\varrho = \{\,[-1]_\varrho\,,\ [0]_\varrho\,,\ [1]_\varrho\,\}$$

3.2

Gegeben ist die Relation $\varrho \subseteq A \times A$ mit $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ und $(m, n) \in \varrho \Leftrightarrow 3|(m^2 - n^2)$

1. ϱ ist reflexiv:

$$\begin{aligned} &3|(m^2 - m^2) \\ \Leftrightarrow\ &3|0 \\ \curvearrowright\ &(m, m) \in \varrho \end{aligned}$$

2. ϱ ist symmetrisch:
   Sei $(m, n) \in \varrho$

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= 3k \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow n^2 - m^2 &= 3(-k) \\ \curvearrowright (n, m) &\in \varrho \end{aligned}$$

3. ϱ ist transitiv:
   Seien (m, n) und $(n, p) \in \varrho$

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 = 3k \ &\wedge \ n^2 - p^2 = 3l \qquad k, l \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow m^2 = 3k + n^2 \ &\wedge \ p^2 = n^2 - 3l \\ \Rightarrow m^2 - p^2 &= (3k + n^2) - (n^2 - 3l) \\ \Leftrightarrow m^2 - p^2 &= 3k + 3l \\ \Leftrightarrow m^2 - p^2 &= 3(k + l) \\ \curvearrowright (m, p) &\in \varrho \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \varrho$ ist Äquivalenzrelation

$$A/_{\varrho} = \{\, [1]_{\varrho}\, ,\ [3]_{\varrho}\, \} = \Big\{ \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}, \{3, 6, 9\} \Big\}$$

3.3

Gegeben ist die Relation $\varrho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(m,n) \in \varrho \Leftrightarrow m|n$

1. ϱ ist reflexiv:

$$\begin{aligned} &m|m \\ &\curvearrowright (m,m) \in \varrho \end{aligned}$$

2. ϱ ist nicht symmetrisch:
   Sei $(m,n) \in \varrho$ und $m \neq n$

$$\begin{aligned} m|n &\not\Rightarrow n|m \\ \curvearrowright (m,n) &\notin \varrho \end{aligned}$$

3. ϱ ist reflexiv:
   Seien (m,n) und $(n,p) \in \varrho$

$$\begin{aligned} n = m \cdot k \ \wedge \ p = n \cdot l \qquad k,l \in \mathbb{N}_0 \\ \Rightarrow p = m \cdot k \cdot l \\ \curvearrowright (m,p) \in \varrho \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \varrho$ ist keine Äquivalenzrelation