Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 13) Studiengang Network Computing WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

22. Januar 2005

1 ε-δ-Formalismus

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= |x - 0| \\ &= |x| \\ &= x \\ &< \delta = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \\ &= |\sqrt{x}| \\ &= \sqrt{x} \\ &< \varepsilon \\ \curvearrowright x &< \varepsilon^2 \end{aligned}$$

2 Stetigkeit

Gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ a\,\cos(bx) & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ 1 & \text{für } x > \pi \end{cases}$$

Damit f in $\mathbb{R}$ stetig ist, müssen links- und rechtsseitige Grenzwerte in $x_{01} = 0$ und $x_{02} = \pi$ existieren, jeweils gleich sein und mit dem zugehörigen Funktionswert übereinstimmen:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = g_{l1} = g_{r1} = \lim_{x \to 0+0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to \pi-0} f(x) = g_{l2} = g_{r2} = \lim_{x \to \pi+0} f(x) = f(\pi)$$

- Untersuchen $x_{01} = 0$
  - linksseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_{l1} &= \lim_{x \to 0-0} f(x) \\ &= \lim_{x \to 0-0} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

  - rechtsseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_{r1} &= \lim_{x \to 0+0} f(x) \\ &= \lim_{x \to 0+0} a \cos(bx) \qquad x = 0 + h,\ h > 0,\ h \to 0 \\ &= a \lim_{h \to 0} \cos(b(0+h)) \\ &= a \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Damit f in x_{01} stetig ist, muss gelten:

$$g_{l1} = g_{r1} = a = -1$$

- Untersuchen $x_{02} = \pi$
  - linksseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_{l2} &= \lim_{x \to \pi-0} f(x) \\ &= \lim_{x \to \pi-0} a \cos(bx) \qquad x = \pi - h,\ h > 0,\ h \to 0 \\ &= a \lim_{h \to 0} \cos(b(\pi - h)) \\ &= a \cos(b\pi) \end{aligned}$$

  - rechtsseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_{r2} &= \lim_{x \to \pi+0} f(x) \\ &= \lim_{x \to \pi+0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Damit f in x_{02} stetig ist, muss gelten:

$$g_{l2} = g_{r2} = a \cos(b\pi) = 1$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -1 \cdot \cos(b\pi) &= 1 \\ b\pi &= \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\ b &= 1 + 2k \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ -\cos((1+2k)x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{für } x > \pi \end{cases}$$

- Untersuchen Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(0) &= -\cos((1+2k)0) \\ &= -\cos 0 \\ &= -1 \\ &= g_{l1} = g_{r1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\pi) &= -\cos((1+2k)\pi) \\ &= -\cos \pi \\ &= 1 \\ &= g_{l2} = g_{r2} \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Funktion f ist stetig in $\mathbb{R}$ für $a = -1$ und $b = 1 + 2k$ (mit $k \in \mathbb{Z}$).

3 Grenzwerte

3.1

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} &= \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} &= \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.3

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

4 Einseitige Grenzwerte

4.1

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0+0} x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{x\to0+0} x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} \qquad x=0+h,\ h>0,\ h\to0\\
&= \lim_{h\to0} h\sqrt{1+\frac{4}{h^2}}\\
&\geq \lim_{h\to0} h\sqrt{\frac{4}{h^2}}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{2h}{h}\\
&= 2\\
\lim_{h\to0} h\sqrt{1+\frac{4}{h^2}} &= \lim_{h\to0}\sqrt{h^2\left(1+\frac{4}{h^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to0}\sqrt{h^2+4}\\
&\leq \lim_{h\to0}\sqrt{h^2+4h+4}\\
&= \lim_{h\to0}\sqrt{(h+2)^2}\\
&= \lim_{h\to0}(h+2)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$\curvearrowright \lim_{x\to0+0} x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$$

4.2

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-0} x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{x\to 0-0} x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} \qquad x=0-h,\ h>0,\ h\to 0\\
&= \lim_{h\to 0}(0-h)\sqrt{1+\frac{4}{(0-h)^2}}\\
&= -\lim_{h\to 0} h\sqrt{1+\frac{4}{h^2}}\\
&= -2
\end{aligned}
$$

5 Lücken, Sprungstellen, Polstellen

5.1

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

- Linksseitiger Grenzwert

$$
\begin{aligned}
g_l &= \lim_{x\to 0-0} f(x) \qquad x=0-h,\ h>0,\ h\to 0\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0-h)}{0-h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{-h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sinh}{h}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

- Rechtsseitiger Grenzwert

$$
\begin{aligned}
g_r &= \lim_{x\to 0+0} f(x) \qquad x=0+h,\ h>0,\ h\to 0\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\curvearrowright$ Links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und sind gleich.
$\curvearrowright$ $f(x)$ besitzt in $x_0=0$ eine (hebbare) Lücke.

5.2

$$f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$$

- Linksseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_l &= \lim_{x\to 0-0} f(x) \qquad x = 0-h,\ h>0,\ h\to 0 \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0-h)}{|0-h|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

- Rechtsseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_r &= \lim_{x\to 0+0} f(x) \qquad x = 0+h,\ h>0,\ h\to 0 \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{|h|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren, sind endlich, aber voneinander verschieden.
$\curvearrowright$ $f(x)$ besitzt in $x_0 = 0$ eine Sprungstelle.

5.3

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

Es existiert kein Grenzwert von $f(x)$ in $x_0 = 0$.
$\curvearrowright$ $f(x)$ besitzt in $x_0 = 0$ eine Unstetigkeit 2. Art.

5.4

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

- Linksseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_l &= \lim_{x \to 0-0} f(x) \qquad x = 0 - h,\ h > 0,\ h \to 0 \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin(0-h)} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin h} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- Rechtsseitiger Grenzwert

$$\begin{aligned} g_r &= \lim_{x \to 0+0} f(x) \qquad x = 0 + h,\ h > 0,\ h \to 0 \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin(0+h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin h} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ $f(x)$ besitzt in $x_0 = 0$ eine Polstelle ungerader Ordnung.