Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 11)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

7. Januar 2005

1 Kompositionen

Gegeben:

$$\begin{array}{lll} f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} & x \mapsto \frac{x-1}{x+1} & W_f = [-1, 1) \\ g : [-1, +\infty) \to \mathbb{R} & x \mapsto x^2 & W_g = [0, +\infty) \\ h : (0, +\infty) \to \mathbb{R} & x \mapsto \ln x & W_h = (-\infty, +\infty) \end{array}$$

1.1 $f \circ g$

$$W_g = [0, +\infty) \subseteq D_f = [0, +\infty)$$

$\curvearrowright$ Komposition existiert.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$D_{f \circ g} = D_g = [-1, +\infty)$$

1.2 $f \circ h$

$$W_h = (-\infty, +\infty) \nsubseteq D_f = [0, +\infty)$$

$\curvearrowright$ Komposition existiert nicht.

1.3 $g \circ f$

$$W_f = [-1,1) \subseteq D_g = [-1,+\infty)$$

$\curvearrowright$ Komposition existiert.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\frac{x-1}{x+1}) \\ &= (\frac{x-1}{x+1})^2\end{aligned}$$

$$D_{g \circ f} = D_f = [0,+\infty)$$

1.4 $h \circ g$

$$W_g = [0,+\infty) \nsubseteq D_h = (0,+\infty)$$

$\curvearrowright$ Komposition existiert nicht.

2 Beschränktheit

2.1

$$f : (1,2] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^4$$

$\curvearrowright$ Die Funktion ist beschränkt auf $(1,16]$

$$\begin{aligned}\sup f &= \max f = 16 \\ \inf f &= 1\end{aligned}$$

Minimum existiert nicht.

2.2

$$f : [-2,2) \cup (2,4] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1}{(2-x)^2}$$

$\curvearrowright$ Die Funktion ist nach unten beschränkt

$$\inf f = \min f = \frac{1}{16}$$

3 Strenge Monotonie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^2 - 5x + 4$$

f definiert eine nach oben offene Parabel. Eine solche ist bis zu ihrem Scheitelpunkt streng monoton fallend und danach streng monoton wachsend.

Der Scheitelpunkt befindet sich in der Mitte zwischen den Nullstellen der Parabel.

Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Der Scheitelpunkt befindet sich bei $x = \frac{5}{2}$

$\curvearrowright$ f ist

- streng monoton fallend für $x \in (-\infty, \frac{5}{2}]$
- streng monoton wachsend für $x \in [\frac{5}{2}, +\infty)$

4 Periodizität

4.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sin^2 x$$

Untersuchen der Maxima:

$$\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$$

$$\begin{aligned} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \arcsin -1 &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Periodizität bleibt erhalten.

Differenz zwischen Maxima:

$$\begin{aligned} p &= (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) - (\frac{\pi}{2} + 3k\pi) \\ &= \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

4.2

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sin(x^2)$$

Untersuchen der Maxima:

$$\begin{aligned} \sin(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \\ &= \sqrt{\frac{\pi(1+4k)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+4k} \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Periodizität bleibt nicht erhalten; die Abstände zwischen den Maxima werden kleiner.

$\curvearrowright$ f ist nicht periodisch.

5 Symmetrie von Funktionen

5.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x \cdot |x|$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ x \cdot |x| &= -(-x \cdot |-x|) \\ x \cdot |x| &= x \cdot |x| \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ f ist ungerade.

5.2

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x + x^2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + x^2 \\ f(-x) &= (-x) + (-x)^2 \\ &= -(x - x^2) \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ f ist nicht symmetrisch.

5.3

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ \ln \frac{1+x}{1-x} &= -\left(\ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} \right) \\ \ln(1+x) - \ln(1-x) &= -\Big(\ln(1-x) - \ln(1+x) \Big) \\ \ln(1+x) - \ln(1-x) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ f ist ungerade.

6 Produkt aus gerader und ungerader Funktion

Es sei g gerade Funktion, u ungerade Funktion. Dann gilt

$$g(x) = g(-x) \qquad \text{und} \qquad u(x) = -u(-x)$$

Bilden des Produktes:

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \cdot u(x) \\ &= g(-x) \cdot (-u(-x)) \\ &= -\Big(g(-x) \cdot u(-x)\Big) \\ &= -p(-x) \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Das Produkt p aus g und u ist ungerade.

7 Zusatz

Es sei g gerade Funktion, u ungerade Funktion. Dann gilt

$$g(x) = g(-x) \qquad \text{und} \qquad u(x) = -u(-x)$$

Für jede in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f lässt sich ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} g(x) + u(x) &= f(x) \\ g(-x) + u(-x) &= f(-x) \end{aligned}$$

aufstellen.

Auf Grund der Symmetrie von g und u ergibt sich

$$\begin{aligned} g(x) + u(x) &= f(x) \\ g(x) - u(x) &= f(-x) \end{aligned}$$

Nach g bzw. u aufgelöst:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(-x) + u(x) \\ u(x) &= g(x) - f(x) \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} f(-x) + u(x) + u(x) &= f(x) \\ 2u(x) &= f(x) - f(-x) \\ u(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g(x) + g(x) - f(-x) &= f(x) \\ 2g(x) &= f(x) + f(-x) \\ g(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{aligned}$$