Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 10)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

6. Januar 2005

1 Metrischer Raum

1.1

$$\begin{aligned}
d\Big((101101),(100001)\Big) &= (2^{-1}|1-1|) + (2^{-2}|0-0|) + (2^{-3}|1-0|) + (2^{-4}|1-0|) + \\
&\quad + (2^{-5}|0-0|) + (2^{-6}|1-1|) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot 1 + \frac{1}{16}\cdot 1 + \frac{1}{32}\cdot 0 + \frac{1}{64}\cdot 0 \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

1.2

1.2.1 $r = 0,25$

- Damit ein Punkt von (101010) einen Abstand $d \leq 0,25 = \frac{1}{4}$ hat, muss das erste Glied der Reihe Null sein.

  $\curvearrowright$ Es kommen nur Punkte der Form $(1\,x_2x_3x_4x_5x_6)$ in Frage.

- Falls das zweite Glied der Reihe $\frac{1}{4}$ ist (d.h. $x_2 = 1$), müssen alle folgenden Glieder Null sein.

  $\curvearrowright x_2 = 1 \;\longrightarrow\; x_3 = x_5 = 1 \;\wedge\; x_4 = x_6 = 0$

  $\curvearrowright$ (111010) liegt innerhalb der Kugel.

- Falls $x_2 = 0$, können die restlichen Glieder in der Summe maximal $\frac{15}{64} \approx 0,23 < 0,25$ ergeben. D.h. die restlichen Glieder spielen dann keine Rolle mehr.

$\curvearrowright$ Alle Punkte der Form $(1\,0\,x_3x_4x_5x_6)$ liegen innerhalb der Kugel.

$\curvearrowright$ Es liegen $2^4 + 1 = 17$ Punkte innerhalb der abgeschlossenen Kugel.

1.2.2 $r = 0,03$

Damit ein Punkt von (101010) einen Abstand $d \leq 0,03$ hat, müssen alle Glieder der Reihe bis auf das letzte Null sein, d.h. es liegen genau zwei Punkte der Form $(10101x_6)$ innerhalb der abgeschlossenen Kugel.

1.3

Der maximale Abstand, den zwei Punkte haben können, beträgt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{64} = \frac{63}{64} < 1$$

1.4

Axiome des metrischen Raumes:

1. $\forall x, y : \; d(x,y) \geq 0, \;\; d(x,y) = 0 \;\longrightarrow\; x = y$

   - Da jedes einzelne Glied der Reihe positiv ist ($\frac{1}{2^k} + |x_k - y_k|$, $k \in \{1, \ldots, 6\}$), muss auch die Gesamtsumme positiv sein.
   - Das einzelne Glied der Reihe ist genau dann Null, wenn $|x_k - y_k|$ Null ist. Die Gesamtsumme ist dann Null, wenn $x_k = y_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, 6\}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x = y$.

2. $\forall x, y : \; d(x,y) = d(y,x)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{6} 2^{-k}|x_k - y_k| \\ &= \sum_{k=1}^{6} 2^{-k}|y_k - x_k| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

3. $\forall x, y, z: \; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

   Seien $x, y, z \in X$

$$\sum_{k=1}^{6} 2^{-k}|x_k - y_k| + \sum_{k=1}^{6} 2^{-k}|y_k - z_k| \geq \sum_{k=1}^{6} 2^{-k}|x_k - z_k|$$

$$\sum_{k=1}^{6} 2^{-k}\Big(|x_k - y_k| + |y_k - z_k|\Big) - \sum_{k=1}^{6} 2^{-k}|x_k - z_k| \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{6} 2^{-k}\Bigg(\underbrace{\underbrace{|x_k - y_k| + |y_k - z_k|}_{\geq |x_k - z_k|} - |x_k - z_k|}_{\geq 0}\Bigg) \geq 0$$

1.5

Da für die Konvergenz einer Folge gegen a für $n \geq n_0$ und ein beliebig klein gewähltes ϵ gelten muss $d(x_n, a) < \epsilon$, d.h. unendlich viele Elemente innerhalb der ϵ-Umgebung und nur endlich viele außerhalb, muss die Folge deshalb ab einer gewissen Stelle konstant sein, da X nur *endlich viele Elemente* (2^6) besitzt.

2 Funktionen

2.1

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = (x-3)^2$$
$$W_f = [0, +\infty)$$

Die Funktion f ist

- nicht injektiv: $f(2) = f(4) = 1$, aber $2 \neq 4$
- nicht surjektiv: $W_f = [0, +\infty) \neq \mathbb{R} = Y$

2.2

$$f : [1, 3] \to [0, 4] \qquad f(x) = (x-3)^2$$
$$W_f = [0, 4]$$

Die Funktion f ist

- injektiv:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ (x_1 - 3)^2 &= (x_2 - 3)^2 \\ |x_1 - 3| &= |x_2 - 3| \\ -x_1 + 3 &= -x_2 + 3 \qquad (\text{da } 1 \leq x \leq 3 \ \Leftrightarrow \ -2 \leq x - 3 \leq 0) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

- surjektiv: $W_f = [0, 4] = Y$

$\curvearrowright$ f ist bijektiv

2.3

$$f : [3, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = (x-3)^2$$
$$W_f = [0, +\infty)$$

Die Funktion f ist

- injektiv:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ (x_1 - 3)^2 &= (x_2 - 3)^2 \\ |x_1 - 3| &= |x_2 - 3| \\ x_1 - 3 &= x_2 - 3 \qquad (\text{da } x \geq 3 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

- nicht surjektiv: $W_f = [0, +\infty) \neq \mathbb{R} = Y$

2.4

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$$

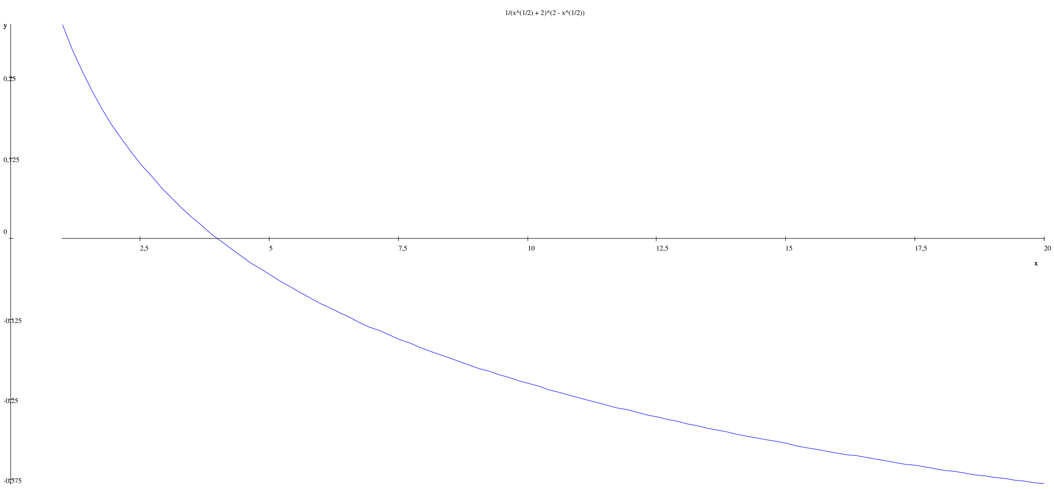
$$W_f = \left(-1, \frac{1}{3}\right]$$

Die Funktion f ist

- injektiv:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
\frac{2 - \sqrt{x_1}}{2 + \sqrt{x_1}} &= \frac{2 - \sqrt{x_2}}{2 + \sqrt{x_2}} \\
(2 - \sqrt{x_1})(2 + \sqrt{x_2}) &= (2 - \sqrt{x_2})(2 + \sqrt{x_1}) \\
4 + 2\sqrt{x_2} - 2\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} &= 4 + 2\sqrt{x_1} - 2\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\
4\sqrt{x_2} &= 4\sqrt{x_1} \\
\sqrt{x_2} &= \sqrt{x_1} \\
x_2 &= x_1
\end{aligned}$$

- nicht surjektiv: $W_f = \left(-1, \frac{1}{3}\right] \neq \mathbb{R} = Y$



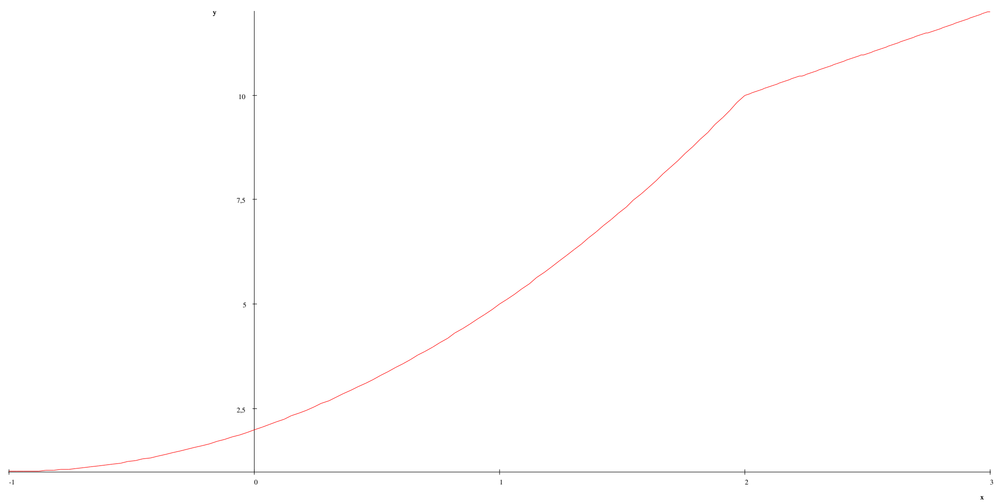
2.5

$$f : [-1, 3] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 1 & , \; x \in [-1, 2] \\ 2x + 6 & , \; x \in (2, 3] \end{cases}$$

$$W_f = [1, 12]$$

Die Funktion f ist

- injektiv: Beide Teilfunktionen sind streng monoton wachsend (siehe Graph)
- nicht surjektiv: $W_f = [1, 12] \neq \mathbb{R} = Y$



3 Umkehrfunktionen

3.1 Funktion aus (2.2)

$$f : [1, 3] \to [0, 4] \qquad f(x) = (x-3)^2$$

$$f^{-1} : [0, 4] \to [1, 3]$$

$$\begin{aligned} x &= (y-3)^2 \\ \sqrt{x} &= |y-3| \\ \sqrt{x} &= -y + 3 \qquad (\text{da } 1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq y - 3 \leq 0) \\ f^{-1}(x) = y &= 3 - \sqrt{x} \end{aligned}$$

3.2 Funktion aus (2.3)

$$f : [3, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = (x-3)^2$$
$$W_f = [0, +\infty)$$
$$f^{-1} : [0, +\infty) \to [3, +\infty)$$

$$\begin{aligned} x &= (y-3)^2 \\ \sqrt{x} &= |y-3| \\ \sqrt{x} &= y-3 \qquad (\text{da } y \geq 3 \Leftrightarrow y-3 \geq 0) \\ f^{-1}(x) = y &= \sqrt{x}+3 \end{aligned}$$

3.3 Funktion aus (2.4)

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$
$$W_f = \left(-1, \frac{1}{3}\right]$$
$$f^{-1} : \left(-1, \frac{1}{3}\right] \to [1, +\infty)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2-\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}} \\ x(2+\sqrt{y}) &= 2-\sqrt{y} \\ 2x+\sqrt{y}x-2+\sqrt{y} &= 0 \\ \sqrt{y}(x+1)+2x-2 &= 0 \\ \sqrt{y} &= \frac{2-2x}{x+1} \\ f^{-1}(x) = y &= \frac{4x^2-8x+4}{x^2+2x+1} \\ &= \frac{4(x^2-2x+1)}{x^2+2x+1} \end{aligned}$$

3.4 Funktion aus (2.5)

$$f : [-1, 3] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 1 & , \ x \in [-1, 2] \\ 2x + 6 & , \ x \in (2, 3] \end{cases}$$

$$W_f = [1, 12]$$

$$f^{-1} : [1, 12] \to [-1, 3]$$

- 1. Teilfunktion

$$\begin{aligned} x &= (y+1)^2 + 1 \\ y + 1 &= \sqrt{x-1} \\ y &= \sqrt{x-1} - 1 \end{aligned}$$

- 2. Teilfunktion

$$\begin{aligned} x &= 2y + 6 \\ 2y &= x - 6 \\ y &= \frac{1}{2}x - 3 \end{aligned}$$

- Trennstelle

$$\begin{aligned} f(2) &= (2+1)^2 + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 & , \ x \in [1, 10] \\ \frac{1}{2}x - 3 & , \ x \in (10, 12] \end{cases}$$