

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I

Studiengang Network Computing

WS 2004/2005

10. Serie — Abgabe in der Übung am 7.1.2005

Die Übungsaufgaben findet man auch im Internet unter der Adresse
<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~lyska/BNC-2004>

1. Es sei X die Menge aller aus sechs Bits bestehenden Wörter. Der Abstand zweier Elemente $x = (x_1x_2x_3x_4x_5x_6)$ und $y = (y_1y_2y_3y_4y_5y_6)$ mit $x_k, y_k \in \{0, 1\}$ sei durch

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^6 2^{-k} |x_k - y_k|$$

definiert.

- a) Berechnen Sie den Abstand von (101101) und (100001).
b) Wieviele Punkte liegen in den abgeschlossenen Kugeln mit Mittelpunkt (101010) und den Radien $r = 0.25$ bzw. $r = 0.03$?
c) Zeigen Sie, dass der Abstand zweier beliebiger Punkte kleiner als 1 ist.
Z1) Beweisen Sie, dass der Abstand die Axiome eines metrischen Raums erfüllt.
Z2) Zeigen Sie, dass eine Folge in diesem Raum genau dann konvergiert, wenn sie von einer gewissen Stelle an konstant ist.
2. Für jede der folgenden Funktionen $f: X \rightarrow Y$ bestimme man den Wertebereich W_f und gebe an, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Man skizziere die Graphen der Funktionen der Teilaufgaben d) und e) in einem geeignet gewählten Bereich eines kartesischen Koordinatensystems.

a) $X = [1, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - 3)^2.$$

c) $X = [3, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - 3)^2.$$

b) $X = [1, 3]$, $Y = [0, 4]$,

$$f(x) = (x - 3)^2.$$

d) $X = [1, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

e) $X = [-1, 3]$, $Y = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 + 1 & \text{falls } x \in [-1, 2] \\ 2x + 6 & \text{falls } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

3. Man bestimme die Umkehrfunktionen aller injektiven Funktionen der vorigen Aufgabe (inklusive der Angabe ihres Definitionsbereichs)!