Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 8)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

7. Dezember 2004

1 Konvergenz und Divergenz von Folgen

1.1

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

1.2

$$a_n = (-3)^n$$

Folge strebt gegen

- $-\infty$ für $n = 2m+1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$
- $+\infty$ für $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) ist unbestimmt divergent

1.3

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-4n^2+1}{n^2-n+3}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\left(1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)\\ &= \infty\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) ist bestimmt divergent

1.4

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2 n + 2\cos^3 n}{n}\right)$$

Da Folge $\sin^2 n + 2\cos^3 n$ beschränkt ist (zwischen -2 und 3) und n bestimmt divergent ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2 n + 2\cos^3 n}{n}\right) = 0$$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

1.5

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+(-3)^n}{3^n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n}+\frac{(-3)^n}{3^n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{-3}{3}\right)^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+(-1)^n\right)\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) alterniert zwischen 0 und 2

1.6

Die Folge

$$a_n = \left(\frac{1-4\mathrm{i}}{5}\right)^n$$

ist geometrische Folge mit $q = \frac{1-4\mathrm{i}}{5}$ und konvergiert damit gegen 0, falls $|q| < 1$ ist.

$$\begin{aligned}|q| &= \left|\frac{1-4\mathrm{i}}{5}\right| \\ &= \frac{|1-4\mathrm{i}|}{|5|} \\ &= \frac{\sqrt{1^2+(-4)^2}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{5} \\ &< 1\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

1.7

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3n]{n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1^{\frac{2}{3}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

1.8

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\curvearrowright$ Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

2 Grenzwerte

2.1

$$a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$$

Da $\left(2+\frac{1}{n}\right) \geq 2$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

$\curvearrowright$ Folge ist bestimmt divergent.

2.2

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$\curvearrowright$ Folge konvergiert gegen e^2

2.3

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = e^2$$

$\curvearrowright$ Folge konvergiert gegen e^2

2.4

$$\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{2}{n}\right)^{2n}$$

Da Exponent $2n$ Vielfaches von 2 ist, gilt

$$\begin{aligned}\left(-1+\frac{2}{n}\right)^{2n} &= \left|-1+\frac{2}{n}\right|^{2n}\\ &= \left|1-\frac{2}{n}\right|^{2n}\\ &= \left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{2}{n}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{2n}\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{n}\right)^{2}\\ &= \left(e^{-2}\right)^2\\ &= \frac{1}{e^4}\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge konvergiert gegen $\frac{1}{e^4}$

2.5

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^{n}\\ &= e^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{e}\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge konvergiert gegen $\sqrt{e}$

2.6

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n}}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge konvergiert gegen 1

3 Aussagen

3.1

Damit $\frac{1}{a_n}$ gegen 0 konvergiert, muss gelten

$$\left|\frac{1}{a_n}-0\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \epsilon$$

bzw.

$$\frac{1}{\epsilon} < |a_n|$$

Da (a_n) bestimmt divergent ist ($a_n \to +\infty$), ist diese Ungleichung für jedes ϵ und hinreichend großes n erfüllt.

3.2

Behauptung:

$$a_n \to 0 \longrightarrow \frac{1}{a_n} \to +\infty$$

Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} a_n &:= -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{a_n} &= -n \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Folge $\frac{1}{a_n}$ konvergiert gegen $-\infty$

3.3

Damit a_n gegen 0 konvergiert, muss gelten

$$|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$$

bzw.

$$\frac{1}{\epsilon} < \left|\frac{1}{a_n}\right|$$

Da $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ unbestimmt divergent ist ($\frac{1}{a_n} \to \infty$), ist diese Ungleichung für jedes ϵ und hinreichend großes n erfüllt.

3.4

$$\begin{aligned} |a_n| &< \epsilon \qquad &&(\text{da } a_n \to 0) \\ -a_n &< \epsilon \qquad &&(\text{da } a_n < 0) \\ \frac{1}{a_n} &< -\frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \frac{1}{a_n} \to -\infty$$