Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 7)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

27. November 2004

1 Supremum und Infimum

1.1

$$
\begin{aligned}
a_n &:= (-1)^n + \frac{2}{n} \\
\curvearrowright a_n &\in (-1, 2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sup a_n &= \max a_n = 2 \\
\inf a_n &= -1
\end{aligned}
$$

a_n besitzt kein Minimum

1.2

$$
\begin{aligned}
b_n &:= (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right) \\
\curvearrowright b_n &\in [-3, 2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sup b_n &= \max b_n = 2 \\
\inf b_n &= \min b_n = -3
\end{aligned}
$$

1.3

$$\begin{aligned} c_n &:= 1 + (-1)^n \frac{2}{n} \\ \curvearrowright c_n &\in [-1, 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup c_n &= \max c_n = 2 \\ \inf c_n &= \min c_n = -1 \end{aligned}$$

2 Monotonie

2.1

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^5 + 1}}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \\ \frac{1}{\sqrt{(n+1)^5 + 1}} &< \frac{1}{\sqrt{n^5 + 1}} \\ \sqrt{n^5 + 1} &< \sqrt{(n+1)^5 + 1} \\ \left|n^5 + 1\right| &< \left|(n+1)^5 + 1\right| \\ n^5 + 1 &< (n+1)^5 + 1 \\ n^5 &< (n+1)^5 \\ n &< n + 1 \\ 0 &< 1 \end{aligned}$$

$\curvearrowright a_n$ ist streng monoton fallend.

2.2

$$a_n := \frac{n^2}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &> a_n \\
\frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} &> \frac{n^2}{n+1} \\
(n+1)(n+1)^2 &> n^2(n+2) \\
(n+1)^3 &> n^3+2n^2 \\
n^3+3n^2+3n+1 &> n^3+2n^2 \\
n^2+3n+1 &> 0
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ a_n ist streng monoton wachsend.

3 Grenzwert

3.1

$$a_n := \left(\frac{\mathrm{i}}{4}\right)^n$$

Vermuteter Grenzwert: $a = 0$

$$\begin{aligned}
&|a_n - 0| \\
=& \left|\frac{i^n}{4^n}\right| \\
=& \frac{|i^n|}{|4^n|} \\
=& \frac{1}{4^n} < \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright \quad 4^n &> \frac{1}{\epsilon} \\
n \ln 4 &> \ln \frac{1}{\epsilon} \\
n &> \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 4}
\end{aligned}$$

$$n_0 = \begin{cases} 1 & \text{für } \epsilon \geq 1 \\ \left\lfloor \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 4} \right\rfloor + 1 & \text{für } \epsilon < 1 \end{cases}$$

3.2

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Vermuteter Grenzwert: $a = 1$

$$\begin{aligned}
&|a_n - 1| \\
&= \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1\right| \\
&= \left|1 + 2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right| \\
&= \left|\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \\
&= \left|\frac{2n+1}{n^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{2n+n}{n^2}\right| \\
&= \left|\frac{3}{n}\right| = \frac{3}{n} < \epsilon
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \; n > \frac{3}{\epsilon}$$

$$n_0 = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} \right\rfloor + 1$$

4 Flächeninhalt und Umfang

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 1^2 \\
F_2 &= 1^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
F_3 &= 1^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot 3\left(\frac{1}{3 \cdot 3}\right)^2 \\
&\vdots \\
F_n &= \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \left(\frac{1}{3^k}\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 4 \cdot 1 \\
U_2 &= 4 \cdot 1 + 3\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \frac{1}{3} \\
&= 4 + 3 - 1 \\
U_3 &= 4 \cdot 1 + 3\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{9}\right) - 9 \cdot \frac{1}{9} \\
&= 4 + 3 - 1 + 3 - 1 \\
&\vdots \\
U_n &= 4 + (n-1)(3-1) \\
&= 4 + 2n - 2 \\
&= 2 + 2n
\end{aligned}
$$

Grenzwerte:

1. Flächeninhalt

$$\begin{aligned} a_F &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. Umfang

   $2 + 2n$ besitzt keinen Grenzwert

5 Komplexe Folge

5.1

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ a_n &:= z^n \\ &= r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) \end{aligned}$$

Folge a_n ist beschränkt $\Leftrightarrow r \leq 1$, d.h. $|z| \leq 1$

5.2

Folge a_n ist

streng monoton wachsend $\Leftrightarrow |z| > 1$

streng monoton fallend $\Leftrightarrow |z| < 1$

5.3

a_n ist konvergent für $|z| < 1$. Der Grenzwert ist $a = 0$.

5.4

a_n ist periodisch für $|z| = 1$ und $n \cdot \varphi = 2k\pi$ $(k, n \in \mathbb{Z})$

5.5

$$\varphi = \frac{2\pi}{p}$$

$$z = (\cos\frac{2\pi}{p} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{p})$$