

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

7. Serie — Abgabe in der Übung am 3.12.2004

Die Übungsaufgaben findet man auch im Internet unter der Adresse
<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~lyska/BNC-2004>

1. Es seien für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := (-1)^n + \frac{2}{n}, \quad b_n := (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right), \quad c_n := 1 + (-1)^n \frac{2}{n}.$$

Man gebe Supremum und Infimum sowie, falls existent, Maximum und Minimum der Folgen (a_n) , (b_n) und (c_n) an.

2. Man untersuche die Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Monotonie:

a) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^5 + 1}}$, b) $a_n := \frac{n^2}{n + 1}$.

3. Gegeben seien die Zahlenfolgen

a) $a_n := \left(\frac{i}{4}\right)^n$, b) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$.

Man bestimme (“rate”) jeweils den Grenzwert a der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und bestimme ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

4. Eine Folge ebener Figuren Q_n wird folgendermaßen konstruiert (vgl. Vorlesung): Q_1 ist ein Quadrat der Seitenlänge 1. Q_2 entsteht, indem in der Mitte von drei der vier Seiten des Quadrates Q_1 ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ aufgesetzt wird. Q_3 entsteht, indem an jeder der drei Außenseiten aller zuletzt entstandenen Quadrate ein kleineres Quadrat “wächst”, dessen Seitenlänge gleich einem Drittel der Seitenlänge des letzteren ist, usw.

Man bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Flächeninhalt F_n und den Umfang U_n der Figur Q_n .

Man untersuche, ob die Folgen (F_n) und (U_n) Grenzwerte besitzen und gebe diese an.

- Z) (Es sind 5 Zusatzpunkte erreichbar)

Es sei z eine gegebene komplexe Zahl. Untersuchen Sie die durch $a_n = z^n$ definierte Folge.

- a) Für welche z ist (a_n) beschränkt?
- b) Für welche z ist $(|a_n|)$ monoton?
- c) Für welche z ist (a_n) konvergent? Was ist der Grenzwert?
- d) Geben Sie eine Zahl z an, so dass die primitive Periode von (a_n) gleich einer gegebenen Zahl $p \in \mathbb{N}$ ist.
- e) Für welche z ist (a_n) periodisch?