Lösung der Zusatzaufgabe Analysis 1 (Serie 5)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

16. November 2004

1 Gegebene und gesuchte Werte

1.1 Gegeben

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte des Dreiecks XYZ:

$$\begin{aligned} X &= x_X + y_X\mathrm{i} \\ Y &= x_Y + y_Y\mathrm{i} \\ Z &= x_Z + y_Z\mathrm{i} \end{aligned}$$

1.2 Gesucht

Gesucht sind die Koordinaten der Punkte des Dreiecks ABC:

$$\begin{aligned} A &= x_A + y_A\mathrm{i} \\ B &= x_B + y_B\mathrm{i} \\ C &= x_C + y_C\mathrm{i} \end{aligned}$$

2 Konstruktion von XYZ aus ABC

Es wird das Ergebnis von Aufgabe 3 verwendet: Punktspiegelung am Koordinatenursprung erfolgt, indem der Real- und der Imagiärteil eines Punktes jeweils mit -1 multipliziert wird.

2.1 X aus Spiegelung von A an B

1. Verschieben von B in den Ursprung

$$\begin{aligned} A \to A_0: \ A_0 &= A - B \\ &= (x_A + y_A\mathrm{i}) - (x_B + y_B\mathrm{i}) \\ &= (x_A - x_B) + (y_A - y_B)\mathrm{i} \end{aligned}$$

2. Punktspiegelung am Ursprung

$$\begin{aligned} A_0 \to X_0: \ X_0 &= -\operatorname{Re} A_0 - \operatorname{Im} A_0\, \mathrm{i} \\ &= -(x_A - x_B) - (y_A - y_B)\mathrm{i} \\ &= (x_B - x_A) + (y_B - y_A)\mathrm{i} \end{aligned}$$

3. Rückverschiebung

$$\begin{aligned} X_0 \to X: \ X &= X_0 + B \\ &= (x_B - x_A) + (y_B - y_A)\mathrm{i} + (x_B + y_B\mathrm{i}) \\ &= (2x_B - x_A) + (2y_B - y_A)\mathrm{i} \end{aligned}$$

Analog ergeben sich die Koordinaten von Y und Z:

$$\begin{aligned} Y &= (2x_C - x_B) + (2y_C - y_B)\mathrm{i} \\ Z &= (2x_A - x_C) + (2y_A - y_C)\mathrm{i} \end{aligned}$$

3 Erstellung eines linearen Gleichungssystems

Aus den gegebenen Koordinaten von X, Y und Z ergibt sich:

$$\begin{aligned} X: \ x_X &= 2x_B - x_A & y_X &= 2y_B - y_A \\ Y: \ x_Y &= 2x_C - x_B & y_Y &= 2y_C - y_B \\ Z: \ x_Z &= 2x_A - x_C & y_Z &= 2y_A - y_C \end{aligned}$$

Durch Umformung ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_X &= 2x_B - x_A \\ 2x_B &= x_X + x_A \\ x_B &= \frac{x_X + x_A}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_Z &= 2x_A - x_C \\ x_C &= 2x_A - x_Z \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned}
x_Y &= 2x_C - x_B \\
x_Y &= 2(2x_A - x_Z) - \frac{x_X + x_A}{2} \\
x_Y &= 4x_A - 2x_Z - \frac{x_X}{2} - \frac{x_A}{2} \\
4x_A - \frac{x_A}{2} &= x_Y + 2x_Z + \frac{x_X}{2} \\
\frac{8x_A - x_A}{2} &= 2x_Z + x_Y + \frac{x_X}{2} \\
7x_A &= 4x_Z + 2x_Y + x_X \\
\\
x_A &= \frac{4x_Z + 2x_Y + x_X}{7}
\end{aligned}$$

Auf analoge Art ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{4x_X + 2x_Z + x_Y}{7} \\
x_C &= \frac{4x_Y + 2x_X + x_Z}{7} \\
\\
y_A &= \frac{4y_Z + 2y_Y + y_X}{7} \\
y_B &= \frac{4y_X + 2y_Z + y_Y}{7} \\
y_C &= \frac{4y_Y + 2y_X + y_Z}{7}
\end{aligned}$$

mit denen sich die gesuchten Koordinaten berechnen lassen.