Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 4)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

5. November 2004

1 Normalform komplexer Zahlen

1.1

$$\begin{aligned} & 1 + 3\mathrm{i} + (2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) \\ = \; & 1 + 3\mathrm{i} + (4 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - \mathrm{i}^2) \\ = \; & 1 + 3\mathrm{i} + 4 + 1 \\ = \; & 6 + 3\mathrm{i} \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} & \frac{2 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} \\ = \; & \frac{(2 + \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} \\ = \; & \frac{2 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{1^2 + 2^2} \\ = \; & \frac{0 + 5\mathrm{i}}{5} \\ = \; & \mathrm{i} \end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right| \\ = & \left|\frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right| \\ = & \left|\frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2+1^2}\right| \\ = & \left|\frac{0+2\mathrm{i}}{2}\right| \\ = & |\mathrm{i}| \\ = & 1 \end{aligned}$$

2 Rechenregeln

2.1

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\mathrm{i}\cdot z) &= \mathrm{Im}\, z \qquad z = a + b\mathrm{i} \\ \mathrm{Re}(\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})) &= \mathrm{Im}(a+b\mathrm{i}) \\ \mathrm{Re}(a\mathrm{i}+b\mathrm{i}^2) &= b \\ \mathrm{Re}(-b+a\mathrm{i}) &= b \\ -b &= b \end{aligned}$$

Gegenbeispiel **($z = 5 + 3\mathrm{i}$)**

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\mathrm{i}(5+3\mathrm{i})) = \mathrm{Re}(5\mathrm{i}-3) &= -3 \\ \mathrm{Im}(5+3\mathrm{i}) &= 3 \\ -3 &\neq 3 \end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\mathrm{i}\cdot z) &= \mathrm{Re}\, z \qquad z = a + b\mathrm{i} \\ \mathrm{Im}(\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})) &= \mathrm{Re}(a+b\mathrm{i}) \\ \mathrm{Im}(a\mathrm{i}+b\mathrm{i}^2) &= a \\ \mathrm{Im}(-b+a\mathrm{i}) &= a \\ a &= a \end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned}
|z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \qquad z = a + b\mathrm{i},\ w = c + d\mathrm{i} \\
|(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})| &= |a + b\mathrm{i}| \cdot |c + d\mathrm{i}| \\
|ac + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2| &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\
|(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}| &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
(ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 &= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\
(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 &= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2
\end{aligned}$$

2.4

$$\begin{aligned}
\overline{z \cdot \overline{w}} &= \overline{z} \cdot w \qquad z = a + b\mathrm{i},\ w = c + d\mathrm{i} \\
\overline{(a + b\mathrm{i})\overline{(c + d\mathrm{i})}} &= \overline{(a + b\mathrm{i})}(c + d\mathrm{i}) \\
\overline{(a + b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})} &= (a - b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) \\
\overline{ac - ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} - bd\mathrm{i}^2} &= ac + ad\mathrm{i} - bc\mathrm{i} - bd\mathrm{i}^2 \\
\overline{(ac + bd) + (bc - ad)\mathrm{i}} &= (ac + bd) + (ad - bc)\mathrm{i} \\
(ac + bd) + (ad - bc)\mathrm{i} &= (ac + bd) + (ad - bc)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

3 Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
w &= z^2 + c \\
&= (x + y\mathrm{i})^2 + (a + b\mathrm{i}) \\
&= (x^2 + 2xy\mathrm{i} + y^2\mathrm{i}^2) + (a + b\mathrm{i}) \\
&= (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i} + a + b\mathrm{i} \\
&= (x^2 - y^2 + a) + (2xy + b)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= x^2 - y^2 + a \\
v &= 2xy + b
\end{aligned}$$

4 Polare Darstellung

4.1

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} \\
&= \frac{(-2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} \\
&= \frac{-2+4\mathrm{i}+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} \\
&= \frac{0+5\mathrm{i}}{5} \\
&= \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$r = |z| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\operatorname{Re} z = 0 \ \wedge \ \operatorname{Im} z > 0 \ \Rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

4.2

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\mathrm{i}^3}{2} \cdot (3 + \sqrt{3}\mathrm{i}) \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{2} \cdot (3 + \sqrt{3}\mathrm{i}) \\
&= -\frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{12}{4}} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\varphi &= \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= -\frac{3}{\sqrt{3}} \\
&= -\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{Re} z > 0 \;\wedge\; \operatorname{Im} z < 0 \;\Rightarrow\; z \text{ liegt im 4. Quardanten}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \pi - \frac{\pi}{3} + \pi \\
&= 2\pi - \frac{\pi}{3} \\
&= \left(2 - \frac{1}{3}\right)\pi \\
&= \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}
$$

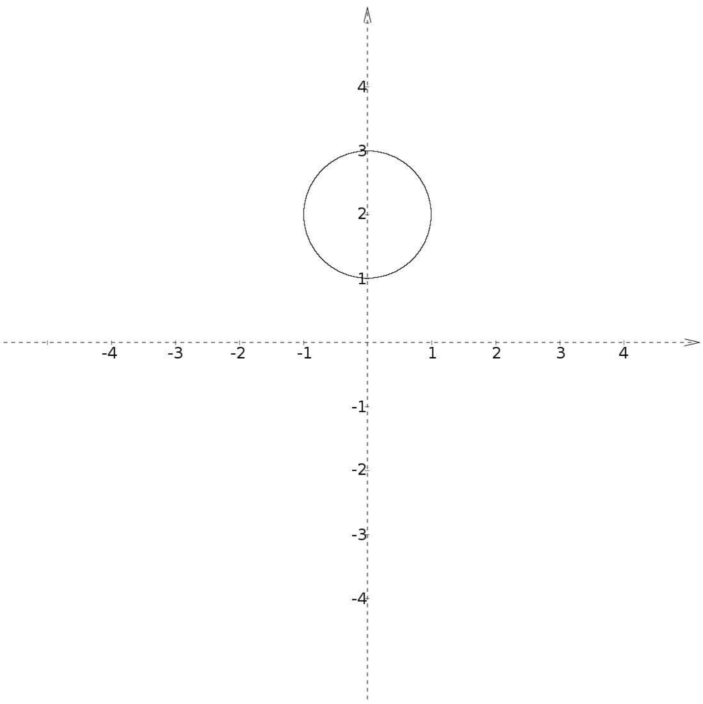
$$
z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)
$$

5 Punktmengen

5.1

$$\begin{aligned} |z - 2\mathrm{i}| &= 1 \qquad z = x + y\mathrm{i} \\ |(x + y\mathrm{i}) - 2\mathrm{i}| &= 1 \\ |x + (y-2)\mathrm{i}| &= 1 \\ \sqrt{x^2 + (y-2)^2} &= 1 \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} &= 1 \end{aligned}$$

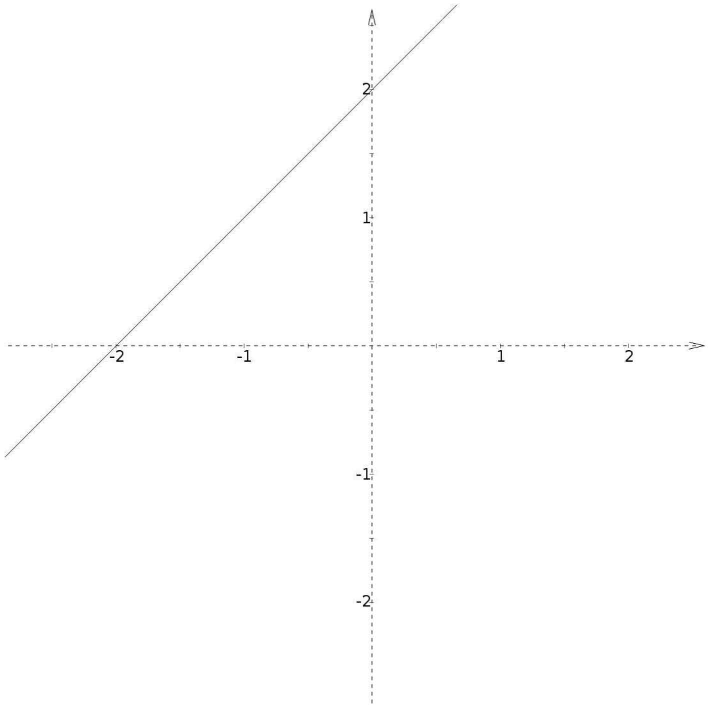
Die Gleichung beschreibt eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt $M(0,2)$ und dem Radius $r = 1$.



5.2

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}((1-\mathrm{i})z) &= 2 \qquad z = x + y\mathrm{i} \\ \operatorname{Im}((1-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})) &= 2 \\ \operatorname{Im}(x + y\mathrm{i} - x\mathrm{i} - y\mathrm{i}^2) &= 2 \\ \operatorname{Im}((x+y) + (y-x)\mathrm{i}) &= 2 \\ y - x &= 2 \\ y &= x + 2 \end{aligned}$$

Die Gleichung beschreibt eine Gerade mit dem Anstieg 1 und der Nullstelle $(-2, 0)$.



5.3

$$
\begin{aligned}
|z|^2 &< \operatorname{Im} z \qquad z = x + y\mathrm{i} \\
|x + y\mathrm{i}|^2 &< \operatorname{Im}(x + y\mathrm{i}) \\
\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 &< y \\
x^2 + y^2 &< y \\
x^2 + y^2 - y &< 0 \\
x^2 + y^2 - \frac{2}{2}y + \frac{1}{4} &< \frac{1}{4} \\
\left(x - 0\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &< \left(\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung beschreibt eine Kreisscheibe ohne Rand mit dem Mittelpunkt $M(0, \frac{1}{2})$ und dem Radius $r = \frac{1}{2}$.