Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 3)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

29. Oktober 2004

1 Binomialkoeffizienten

1.1

Inklusive aller Multiplikationen mit 1 (die sich aus der Definition der Fakultät ergeben), werden $2n - 2$ (für $n \geq 1$) Multiplikationen benötigt:

im Zähler: $n - 1$ (für $n!$) und

im Nenner: $(k - 1) + (n - k - 1) + 1 = n - 1$ (für $k!\,(n - k)!$)

Durch Kürzen von $n!$ und $k!$ entfallen in Zähler und Nenner jeweils k Faktoren bzw. Multiplikationen. Es verbleiben sowohl im Zähler als auch im Nenner $n - k - 1$ Multiplikationen. Durch Weglassen der Multiplikationen mit 1 und weiteres Kürzen kann die Anzahl der Multiplikationen im Nenner auf 0 reduziert werden. Im Zähler verbleiben abhängig von der Differenz von n und k nur einige wenige Multiplikationen.

1.2

Ausgehend von der in (1.1) aufgestellten Formel ergibt sich für die ersten zehn Zeilen eines Pascalschen Dreiecks:

n	$2n-2$		Koeff.		Multipl.
0	0	$\cdot$	1	=	0
1	0	$\cdot$	2	=	0
2	2	$\cdot$	3	=	6
3	4	$\cdot$	4	=	16
4	6	$\cdot$	5	=	30
5	8	$\cdot$	6	=	48
6	10	$\cdot$	7	=	70
7	12	$\cdot$	8	=	96
8	14	$\cdot$	9	=	126
9	16	$\cdot$	10	=	160
gesamt:					552

1.3

Mit 36 (bzw. 54, falls man die Einsen am Rand durch „Addition“ ermittelt) Additionen gegenüber über 550 Multiplikationen ist der Aufwand, ein Pascalsches Dreieck zu erstellen deutlich geringer.

2 Beweisführung

Zu zeigen

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\
\frac{n!}{k!\,(n-k)!} &= \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} \\
\frac{n!}{k!\,(n-k)!} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \\
\frac{n!}{k!\,(n-k)!} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}
\end{aligned}$$

3 Größter gemeinsamer Teiler

3.1 Primfaktorzerlegung

$$\begin{aligned}
1763 &= 41 \cdot 43 \\
2193 &= 3 \cdot 17 \cdot 43
\end{aligned}$$

3.2 Euklidischer Algorithmus

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2193 & = & 1763 & \cdot & 1 & + & 430 \\ 1763 & = & 430 & \cdot & 4 & + & 43 \\ 430 & = & 43 & \cdot & 10 & + & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Der größte gemeinsame Teiler von 2193 und 1763 ist 43.

4 Nenner rational machen

4.1

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-1} &= \frac{(\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \frac{1-x+\sqrt{1-x}}{1-x-1} \\ &= -\frac{1-x+\sqrt{1-x}}{x} \end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} &= \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{(1-x)-(1+x)} \\ &= -\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x} \end{aligned}$$

5 Kettenbruchentwicklung

5.1

$$
\begin{aligned}
\frac{2003}{123} &= 16 + \frac{35}{123} \\
\frac{123}{35} &= 3 + \frac{18}{35} \\
\frac{35}{18} &= 1 + \frac{17}{18} \\
\frac{18}{17} &= 1 + \frac{1}{17} \\
\frac{17}{1} &= 17 + 0
\end{aligned}
$$

$$
\frac{2003}{123} = [16; 3, 1, 1, 17]
$$

Annäherungsbrüche

i	a_i	p_i	q_i	$\frac{p_i}{q_i}$
0	16	16	1	16
1	3	49	3	$16,33333\ldots$
2	1	65	4	$16,25$
3	1	114	7	$16,28571\ldots$
4	17	2003	123	$16,28455\ldots$

5.2

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1) \qquad (1 < \sqrt{3} < 2) \\
\frac{1}{\sqrt{3}-1} &= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\
&= 1 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1\right) = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \\
\frac{2}{\sqrt{3}-1} &= \frac{2\,(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2\,(\sqrt{3}+1)}{2} \\
&= 2 + ((\sqrt{3}+1) - 2) = 2 + (\sqrt{3} - 1) \\
\frac{1}{\sqrt{3}-1} &= \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, \ldots]
$$

Annäherungsbrüche

i	a_i	p_i	q_i	$\frac{p_i}{q_i}$
0	1	1	1	1
1	1	2	1	2
2	2	5	3	$1,66\ldots$
3	1	7	4	$1,75$
4	2	19	11	$1,7272\ldots$
5	1	26	15	$1,73333\ldots$
6	2	71	41	$1,731707\ldots$
7	1	97	56	$1,732142\ldots$
8	2	265	153	$1,732026\ldots$
9	1	362	209	$1,7320574\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

6 Annäherung

Gesucht ist eine Annäherung an $0,6946 = \frac{6946}{10000} = \frac{3473}{5000}$ mit möglichst kleinem Zähler und Nenner.

$$\begin{aligned}
\frac{3473}{5000} &= 0 + \frac{3473}{5000}\\
\frac{5000}{3473} &= 1 + \frac{1527}{3473}\\
\frac{3473}{1527} &= 2 + \frac{419}{1527}\\
\frac{1527}{419} &= 3 + \frac{270}{419}\\
\frac{419}{270} &= 1 + \frac{149}{270}\\
\frac{270}{149} &= 1 + \frac{121}{149}\\
\frac{149}{121} &= 1 + \frac{28}{121}\\
\frac{121}{28} &= 4 + \frac{9}{28}\\
\frac{28}{9} &= 3 + \frac{1}{9}\\
\frac{9}{1} &= 9 + 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0,6946 = [0;1,2,3,1,1,1,4,3,9]$$

Annäherungsbrüche

i	a_i	p_i	q_i	$\frac{p_i}{q_i}$
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1
2	2	2	3	$0,66666\ldots$
3	3	7	10	$0,7$
4	1	9	13	$0,69230\ldots$
5	1	16	23	$0,69565\ldots$
6	1	25	36	$0,69444\ldots$
7	4	116	167	$0,69461\ldots$
8	3	373	537	$0,6945996\ldots$
9	9	3473	5000	$0,6946$

Der Aufgabenstellung (möglichst kleine Zahlen) entspricht am ehesten der Bruch $\frac{2}{3}$. In der Praxis (Währungsumrechnung) wäre aber auch die Lösung $\frac{7}{10}$ sinnvoll. Zum einen erreicht sie eine bessere Annäherung, zum anderen ist eine Multiplikation mit 7 und eine anschließende Division durch 10 auch „im Kopf“ gut durchführbar.