Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

17. Oktober 2004

1 Beweis durch vollständige Induktion

1.1 Induktionsannahme

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1.2 Induktionsanfang

$$n_0 = 1 \qquad s_{n_0} = 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

1.3 Induktionsschluss

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + \frac{4\,(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2\,(n+1)^2 + 4\,(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\,(n^2 + 4\,(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\,(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

2 „Weinbauer“

2.1 Weinmengen bis 25 l

$$\begin{aligned}
1 \cdot 5 + 0 \cdot 7 &= 5 \\
0 \cdot 5 + 1 \cdot 7 &= 7 \\
2 \cdot 5 + 0 \cdot 7 &= 10 \\
1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 &= 12 \\
0 \cdot 5 + 2 \cdot 7 &= 14 \\
3 \cdot 5 + 0 \cdot 7 &= 15 \\
2 \cdot 5 + 1 \cdot 7 &= 17 \\
1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 &= 19 \\
4 \cdot 5 + 0 \cdot 7 &= 20 \\
0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 &= 21 \\
3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 &= 22 \\
2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 &= 24 \\
5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 &= 25
\end{aligned}$$

2.2 Vollständige Induktion für Mengen ab 25 l

2.2.1 Induktionsannahme

$$n = 5x + 7y \qquad \text{für } n \geq 25$$

2.2.2 Induktionsanfänge

$$\begin{aligned}
n_1 &= 5 \cdot 5 + 7 \cdot 0 = 25 \\
n_2 &= 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 26 \\
n_3 &= 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = 27 \\
n_4 &= 5 \cdot 0 + 7 \cdot 4 = 28 \\
n_5 &= 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 29
\end{aligned}$$

2.2.3 Induktionsschluss

$$\begin{aligned}
n + 5 &= 5\,(x + 1) + 7y \\
n &= 5x + 5 + 7y - 5 \\
n &= 5x + 7y
\end{aligned}$$

3 Irrationale Zahlen

3.1 Beweis durch Gegenannahme

Gegeben seien die Zahlen $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ und $c \in \mathbb{Q}$. Ferner sei angenommen, dass $a + b = c$. Da b und c rational sind, können diese durch $b = \frac{p}{q}$ und $c = \frac{s}{t}$ mit $p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $t \neq 0$ dargestellt werden.

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a + \frac{p}{q} &= \frac{s}{t} \\ a &= \frac{s}{t} - \frac{p}{q} \\ a &= \frac{sq}{tq} - \frac{tp}{tq} \\ a &= \frac{sq - tp}{tq} \end{aligned}$$

Dies führt zu einem Widerspruch, da die rechte Seite der Gleichung niemals irrational werden kann.

3.2 Widerlegung einer These durch Gegenbeispiel

Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist nicht zwingend ebenfalls irrational:

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

4 „Defekte Waage"

4.1 Veranschaulichung durch Übertreibung

Aus $x = 1$ ergibt sich, dass Herr Müller „unendlich" viel Mehl auf die Waage bringen müsste, um sie ins Gleichgewicht zu bekommen.

4.2 Abschätzung des Resultats

Die gewogene Menge Mehl ist zu groß.

4.3 Genauer Wert

$$m_1 = \frac{1 - x}{1 + x} \qquad m_2 = \frac{1 + x}{1 - x} \qquad 0 < x < 1$$

$$
\begin{aligned}
m_{ges} &= m_1 + m_2 \\
&= \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} \\
&= \frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1+x)\,(1-x)} \\
&= \frac{2x^2+2}{1-x^2} \\
&= 2\,\frac{1+x^2}{1-x^2} > 2
\end{aligned}
$$

5 „Schachbrett“

Man beginne mit dem Ende des Spiels und überlege, welche Positionen den Gegenspieler dazu zwingen, den Stein auf ein Feld zu bewegen, von dem aus das Spiel gewonnen werden kann.

Dieser Schritt wird für alle gefundenen Felder solange wiederholt, bis man beim Ausgangsfeld angekommen ist.